F23-T1-A2

a) Geben Sie die Definition von *Nullteilerfreiheit* eines kommutativen Rings an.

b) Bestimmen Sie alle Nullteiler und Einheiten sowie die Inklusionen aller Ideale des kommutativen Rings $\mathbb{Z}/(27)$.

Lösungsvorschlag. Zu a). Es sei R ein kommutativer Ring und $a \in R$. Falls ein $b \in R\setminus\{0\}$ existiert mit $a \cdot b = 0$, so nennt man a einen Nullteiler. R heißt nullteilerfrei, falls in R keine Nullteiler außer 0 existieren.
Zu b) Wegen

$$\overline{3} \cdot \overline{9} = \overline{0}, \overline{6} \cdot \overline{18} = \overline{0}, \overline{3} \cdot \overline{12} = \overline{0}, \overline{15} \cdot \overline{3} = \overline{0}, \overline{21} \cdot \overline{3} = \overline{0}, \overline{24} \cdot \overline{3} = \overline{0}$$

sind $\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{18}, \overline{21}, \overline{24}$ Nullteiler in $\mathbb{Z}/(27)$. Alle anderen Elemente sind Einheiten, da in endlichen Ringen jedes Element entweder Nullteiler oder Einheit sein muss.
Expliziter könnte man auch nachrechnen:

$$\begin{aligned}
&\overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}, \overline{2} \cdot \overline{14} = \overline{1}, \overline{4} \cdot \overline{7} = \overline{1}, \overline{5} \cdot \overline{11} = \overline{1}, \overline{8} \cdot \overline{17} = \overline{1}, \overline{10} \cdot \overline{19} = \overline{1}, \\
&\overline{13} \cdot \overline{25} = \overline{1}, \overline{16} \cdot \overline{22} = \overline{1}, \overline{20} \cdot \overline{23} = \overline{1}, \overline{26} \cdot \overline{26} = \overline{1}.
\end{aligned}$$

Allgemeiner lässt sich sagen, dass die zu 27 teilerfremden Zahlen a Einheiten $\overline{a} \in \mathbb{Z}/(27)$ und die nicht zu 27 teilerfremden Zahlen a Nullteiler $\overline{a} \in \mathbb{Z}/(27)$ definieren.
Nach dem Korrespondensatz entsprechen Ideale in $\mathbb{Z}/(27)$ eindeutig den Idealen in $\mathbb{Z}$, die (27) enthalten. Es ist $\mathbb{Z}$ bekanntlich ein Hauptidealbereich und wegen

$$(27) \subseteq (a) \Leftrightarrow a \mid 27$$

sind letztere genau die Ideale $(1), (3), (9), (27)$. In $\mathbb{Z}/(27)$ erhalten wir dadurch genau die Ideale $(\overline{1}), (\overline{3}), (\overline{9}), (\overline{0})$. Offensichtlich ist $(\overline{0})$ in jedem Ideal enthalten und jedes Ideal ist in $(\overline{1}) = \mathbb{Z}/(27)$ enthalten. Wegen $(9) \subsetneq (3)$ folgt außerdem $(\overline{9}) \subsetneq (\overline{3})$. Weitere Inklusionen gibt es nicht.