F23-T1-A1

a) Es sei $(A, \cdot)$ eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi : A \to A, a \mapsto a^{-1}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

b) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, welches zeigt, dass die entsprechende Aussage für beliebige Gruppen im Allgemeinen falsch ist.

c) Mit $\mathfrak{A}_4$ werde die alternierende Gruppe über 4 Buchstaben bezeichnet. Bestimmen Sie diejenigen $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, für die es einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $\phi : \mathfrak{A}_4 \to \mathbb{Z}/(n)$ gibt.

Lösungsvorschlag. Zu a). Neben $\phi(1_A) = 1_A^{-1} = 1_A$ gilt für $a, b \in A$

$$\phi(a \cdot b) = (a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1} = \phi(a) \cdot \phi(b).$$

Man beachte, dass bei dem vorletzten Gleichheitszeichen eingeht, dass A abelsch ist.
Zu b). Wir betrachten die Gruppe S_3 und berechnen

$$\phi((12) \circ (23)) = \phi((123)) = (123)^{-1} = (321),$$

sowie

$$\phi((12)) \circ \phi((23)) = (12)^{-1} \circ (23)^{-1} = (12) \circ (23) = (123).$$

Wegen $(123) \neq (321)$ ist ϕ kein Gruppenhomomorphismus.
Zu c) Angenommen es existiert ein solches ϕ. Dann gibt es nach dem Homomorphiesatz einen Isomorphismus $\overline{\phi} : \mathfrak{A}/\ker\phi \to \mathbb{Z}/(n)$. Der Kern ist stets ein Normalteiler, daher folgt

$$\ker\phi \in \{\{\mathrm{Id}\}, V_4, \mathfrak{A}_4\}.$$

Nach Satz von Lagrange gilt weiter

$$|\mathfrak{A}_4/\ker\phi| = \frac{|\mathfrak{A}_4|}{|\ker\phi|} = \frac{12}{|\ker\phi|} \in \{1, 3, 12\}.$$

Wegen des Isomorphismus $\overline{\phi}$ erhalten wir $n \in \{1, 3, 12\}$.
Für $n = 1$ existiert ein geeignetes ϕ: der triviale Homomorphismus gegeben durch $a \mapsto [0]$.
Für $n = 3$ kann man ebenfalls ein ϕ finden: Da $\mathfrak{A}_4/V_4$ von Ordnung 3 ist, muss die Faktorgruppe isomorph sein zu $\mathbb{Z}/(3)$ (wir geben hier keine explizite Abbildungsvorschrift an). Verknüpfung mit der kanonischen Projektion liefert dann einen surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$\phi : \mathfrak{A}_4 \longrightarrow \mathfrak{A}_4/V_4 \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/(3).$$

Für $n = 12$ gibt es kein ϕ: Wegen $|\mathfrak{A}_4| = 12 = |\mathbb{Z}/(12)|$ und der Surjektivität müsste ϕ ein Isomorphismus sein - jedoch ist $\mathfrak{A}_4$ nicht abelsch und kann damit nicht isomorph sein zu $\mathbb{Z}/(12)$.