F23-T1-A4

a) Zeigen Sie, dass die Charakteristik eines endlichen Körpers eine Primzahl ist.

b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente eines endlich-dimensionalen Vektorraums V über einem endlichen Körper K eine Potenz der Charakteristik von K ist.

c) Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen; die Charakteristik von K sei ungleich 2. Berechnen Sie die Mächtigkeit der Bahn des Elements

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(K)$$

unter der Operation von $\mathrm{GL}_2(K)$ durch Konjugation.

Lösungsvorschlag. Zu a). Wir betrachten den Kern den Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to K$, der definiert ist durch $1 \mapsto 1_K$. Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealbereich ist, gilt $\ker \varphi = (n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Nach dem Homomorphiesatz exisitiert ein Isomorphismus $\mathbb{Z}/(n) \cong \operatorname{Im} \varphi < K$, sodass wegen der Endlichkeit von K schon $n = 0$ ausgeschlossen werden kann. Weiter ist K ein Integritätsbereich, also auch $\operatorname{Im} \varphi$ und $\mathbb{Z}/(n)$, sodass n eine Primzahl sein muss. Nach Definition ist $\mathrm{char}(K) = n$ also eine Primzahl.
Zu b). Es sei $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis von V über K. Jedes $v \in V$ kann eindeutig geschrieben werden als $\lambda_1 \cdot b_1 + \ldots + \lambda_n \cdot b_n$ für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ und damit besitzt V genau $|K|^n$ Elemente. Mit dem Kontext aus Teilaufgabe a) sehen wir, dass K selbst ein endlich-dimensionaler Vektorraum über dem Körper $\mathbb{Z}/(p)$ ist mit $p = \mathrm{char}(K)$. Mit derselben Argumentation wie für den Vektorraum V folgt, dass K genau p^m Elemente besitzt für ein $m \in \mathbb{N}$. Insgesamt gilt für die Mächtigkeit von V dann

$$|V| = |K|^n = (p^m)^n = p^{mn}.$$

Zu c). Wir betrachten die Gruppenoperation

$$\begin{aligned} \sigma : \mathrm{GL}_2(K) \times \mathrm{GL}_2(K) &\to \mathrm{GL}_2(K) \\ (X, Y) &\mapsto XYX^{-1}. \end{aligned}$$

Für die Mächtigkeit der Bahn gilt bekanntlich

$$|\operatorname{Bahn}(A)| = \frac{|\mathrm{GL}_2(K)|}{|\operatorname{Stab}(A)|}.$$

Mit $|\mathrm{GL}_2(K)| = (q^2 - 1)(q^2 - q)$ genügt es, die Mächtigkeit des Stabilisators zu bestimmen. Dazu berechnen wir:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{Stab}(A) \Leftrightarrow \sigma(X, A) = A \Leftrightarrow XAX^{-1} = A \Leftrightarrow XA = AX$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = c \wedge d = a.$$

Ein Element des Stabilisators ist also von der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a^2 - b^2 \neq 0$, bzw. $b \neq a$ und $b \neq -a$. Damit hat man im Fall $a = 0$ für b genau $q - 1$ Möglichkeiten und im Fall $a \neq 0$ für b genau $q - 2$ Möglichkeiten[1], sodass wir

$$\mathrm{Stab}(A) = q - 1 + (q-1) \cdot (q-2) = (q-1)^2$$

erhalten und weiter

$$|\,\mathrm{Bahn}(A)| = \frac{(q^2-1)(q^2-q)}{(q-1)^2} = q(q+1).$$

[1]Hier geht $a \neq -a$ wegen $\mathrm{char}(K) \neq 2$ ein.