F23-T1-A5

Seien K ein Körper und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen K-Vektorräumen V und W. Seien

$$V^* := \mathrm{Hom}_K(V, K) \quad \text{und} \quad W^* := \mathrm{Hom}_K(W, K)$$

die Dualräume sowie $f^* : W^* \to V^*, \varphi \mapsto \varphi \circ f$ die duale Abbildung.

a) Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine K-Basis von V. Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig sind.

b) Zeigen Sie: Ist f injektiv, dann ist f^* surjektiv.

c) Zeigen Sie: Ist f^* surjektiv, dann ist f injektiv.

Lösungsvorschlag. Zu a). Es sei f injektiv. Wir betrachten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit

$$\lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n) = 0.$$

Wegen der Linearität von f folgt

$$f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = f(0)$$

und wegen der Injektivität $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$. Da $v_1, \ldots, v_n$ eine K-Basis ist von V, können wir wie gewünscht $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ folgern.
Sei andererseits $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig und $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \in V$ für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $f(v) = 0$. Es folgt:

$$0 = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n).$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit muss $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ gelten und damit auch $v = 0$.
Zu b). Es sei $\psi \in V^*$ und wir wollen ein Urbild unter f^* finden, d.h. ein $\varphi \in W^*$ mit $\varphi \circ f = \psi$. Wir wollen φ durch die Bilder der Basisvektoren angeben: für eine K-Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V sind nach Teilaufgabe a) $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig und können durch $w_1 \ldots, w_m \in W$ zu einer K-Basis von W ergänzt werden. Wir definieren $\varphi(f(v_i)) := \psi(v_i)$ und $\varphi(w_i) := 0$. Damit erhalten wir eine K-lineare Abbildung, die nach Konstruktion $\varphi \circ f = \psi$ erfüllt.
Zu c). Es sei $v \in V$ mit $f(v) = 0$. Wir wollen $v \neq 0$ annehmen und das zum Widerspruch führen. Wegen $v \neq 0$ kann man v zu einer K-Basis von V ergänzen und eine Abbildung $\psi \in V^*$ durch die Bilder der Basis definieren; wir wählen $v \mapsto 1_K$. Da f^* surjektiv ist, existiert ein $\varphi \in W^*$ mit $\varphi \circ f = \psi$, was zu folgendem Widerspruch führt:

$$1_K = \psi(v) = \varphi(f(v)) = \varphi(0) = 0.$$