F23-T2-A3

Es sei $R = \{x + y\sqrt{-31} \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$.

a) Begründen Sie, dass R ein Ring ist.

b) Zeigen Sie, dass R nicht faktoriell ist.
Hinweis: Beachten Sie $32 = (1 + \sqrt{-31})(1 - \sqrt{-31})$

Lösungsvorschlag. Zu a). Wegen $R \subseteq \mathbb{C}$ genügt es zu zeigen, dass R ein Unterring ist. Wir überprüfen:

- $0 = 0 + 0 \cdot \sqrt{-31} \in R$, da $0 \in \mathbb{Z}$.
- $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{-31} \in R$, da $0, 1 \in \mathbb{Z}$.
- Für $x + y\sqrt{-31}, x' + y'\sqrt{-31} \in R$ folgt
$$(x + y\sqrt{-31}) - (x' + y'\sqrt{-31}) = \underbrace{(x - x')}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(y - y')}_{\in\mathbb{Z}} \cdot \sqrt{-31} \in R.$$
- Für $x + y\sqrt{-31}, x' + y'\sqrt{-31} \in R$ folgt
$$(x + y\sqrt{-31}) \cdot (x' + y'\sqrt{-31}) = \underbrace{(xx' - 31yy')}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(x'y - xy')}_{\in\mathbb{Z}} \cdot \sqrt{-31} \in R.$$

Zu b). Wir wollen zunächst zeigen, dass $2 \in R$ irreduzibel ist. Sei $x + y\sqrt{-31}$ ein Teiler von 2 in R, dann ist $|x + y\sqrt{-31}|^2 = x^2 + 31y^2$ ein Teiler von $|2|^2 = 4$ in $\mathbb{Z}$. Bis auf Vorzeichen sind 1, 2 und 4 die einzigen Teiler von 4 in $\mathbb{Z}$. Man sieht leicht, dass gilt:

- $|x + y\sqrt{-31}|^2 = x^2 + 31y^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \wedge y = 0$
- $|x + y\sqrt{-31}|^2 = x^2 + 31y^2 = 2$ hat keine Lösung für $x, y \in \mathbb{Z}$
- $|x + y\sqrt{-31}|^2 = x^2 + 31y^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \wedge y = 0$

Damit sind die Teiler von 2 in R gegeben durch $1, -1, 2$ und -2, sodass es in R nur triviale Zerlegungen der 2 gibt und 2 folglich irreduzibel ist.
2 ist jedoch kein Primelement, denn 2 teilt in R offensichtlich 32, jedoch weder $1 + \sqrt{-31}$ noch $1 - \sqrt{-31}$.
In faktoriellen Ringen sind irreduzible Elemente immer auch Primelemente, sodass R nicht faktoriell ist.