F23-T2-A2

Es sei G eine Gruppe der Ordnung 30. Es bezeichnen U_3 und U_5 jeweils eine 3- und eine 5-Sylow-Gruppe von G. Zeigen Sie:

a) Mindestens eine der Gruppen U_3 und U_5 ist ein Normalteiler von G.

b) Ist U_3 normal, so hat G/U_3 eine Untergruppe vom Index 2. Ist U_5 normal, so hat G/U_5 eine Untergruppe vom Index 2.

c) G hat eine Untergruppe U_{15} vom Index 2.

d) Zeigen Sie, dass alle 3-Sylow-Gruppen und alle 5-Sylow-Gruppen von G in U_{15} enthalten sind.

e) Folgern Sie, dass G genau eine 3-Sylowgruppe und genau eine 5-Sylow-Gruppe hat.

Lösungsvorschlag. Zu a). Es seien n_3, bzw. n_5 die Anzahl der 3-, bzw. der 5-Sylow-Gruppen. Nach den Sylowsätzen gilt

$$n_3 \equiv 1 \bmod 3\ , \quad n_3 \mid 10\ , \quad n_5 \equiv 1 \bmod 5 \quad \text{und} \quad n_5 \mid 6.$$

Daraus folgt $n_3 \in \{1, 10\}$ und $n_5 \in \{1, 6\}$. Falls es nur eine Untergruppe der Ordnung 3, bzw. 5 gibt, ist diese ein Normalteiler, sodass wir noch $n_3 = 10$ und $n_5 = 6$ ausschließen müssen: In jeder 3-Sylowgruppe gibt es 2 Elemente der Ordnung 3 und je zwei 3-Sylow-Gruppen sind wegen ihrer Primzahlordnung disjunkt[1], analog gibt es in jeder 5-Sylowgruppe 4 Elemente der Ordnung 5. Damit kommt man auf

$$n_3 \cdot 2 + n_5 \cdot 4 = 44$$

verschiedene Elemente, was ein Widerspruch zur Ordnung von G ist.
Zu b). Falls U_3 normal ist, hat G/U_3 nach Lagrange $|G/U_3| = |G|/|U_3| = 10$ Elemente und nach Sylow eine 5-Sylow-Gruppe V_5 mit 5 Elementen. Wiederum nach Lagrange hat diese den Index $[G/U_3 : V_5] = |G/U_3|/|V_5| = 2$.
Andernfalls hat G/U_5 nach Lagrange 6 Elemente und und nach Sylow eine 3-Sylow-Gruppe V_3 mit 3 Elementen, die Index $6/3 = 2$ hat.
Zu c). Im Fall, dass U_3 normal ist, ist die in Teilaufgabe b) beschriebene Gruppe V_5 nach dem Korrespondenzsatz von der Form W/U_3 ist für eine Untergruppe $W < G$, die U_3 enthält. Nach Lagrange gilt

$$|W| = |U_3| \cdot |W/U_3| = |U_3| \cdot |V_5| = 3 \cdot 5 = 15,$$

sodass wir $U_{15} := W$ setzen können.
Der andere Fall verläuft analog.
Zu d). Aufgrund der Gruppenordnung hat U_{15} eine 3-Sylow-Gruppe mit 3 Elementen und diese ist automatisch auch eine 3-Sylowgruppe von G. Nehmen wir also oBdA an, dass

[1] Vorsicht: das gilt nicht für Sylowgruppen der Ordnung 9,27,...!

bereits $U_3 \subset U_{15}$ gilt. Es sei $\tilde{U}_3$ eine weitere 3-Sylowgruppe von G. Nach den Sylowsätzen ist diese konjugiert zu U_3, d.h. es existiert ein $g \in G$ mit $\tilde{U}_3 = gU_3g^{-1}$. Es ist U_{15} als Untergruppe von Index 2 ein Normalteiler von G, sodass wir einsehen

$$\tilde{U}_3 = g \underbrace{U_3}_{\subset U_{15}} g^{-1} \subset U_{15}.$$

Die Argumentation verläuft für 5-Sylowgruppen analog.
Zu e). Es seien $\tilde{n}_3$, bzw. $\tilde{n}_5$ die Anzahl der 3-, bzw. der 5-Sylow-Gruppen von U_{15}. Nach den Sylowsätzen gilt

$$\tilde{n}_3 \equiv 1 \bmod 3\ , \quad \tilde{n}_3 \mid 5\ , \quad \tilde{n}_5 \equiv 1 \bmod 5 \quad \text{und} \quad \tilde{n}_5 \mid 3,$$

woraus direkt $\tilde{n}_5 = 1 = \tilde{n}_3$. Nach Teilaufgabe d) gilt $n_3 = \tilde{n}_3$ und $n_5 = \tilde{n}_5$, sodass die gewünschte Aussage folgt.