

F23-T2-A5

Es sei \mathbb{F}_{625} der endliche Körper mit 625 Elementen mit Primkörper P . Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente $a \in \mathbb{F}_{625}$ mit $P(a) = \mathbb{F}_{625}$.

Lösungsvorschlag. Der Primkörper von $\mathbb{F}_{625} = \mathbb{F}_{5^4}$ ist \mathbb{F}_5 . Für $a \in \mathbb{F}_{625}$ ist $\mathbb{F}_5(a)$ stets ein Zwischenkörper der Erweiterung $\mathbb{F}_{625}|\mathbb{F}_5$. Aus der Theorie endliche Körper ist bekannt, dass gilt:

$$\mathbb{F}_{p^n} \subseteq \mathbb{F}_{p^m} \Leftrightarrow n \mid m.$$

Damit entspricht $\mathbb{F}_5(a)$ immer einem der drei Zwischenkörper $\mathbb{F}_5, \mathbb{F}_{5^2}$ oder \mathbb{F}_{5^4} . Wir sehen also:

$$\mathbb{F}_5(a) = \mathbb{F}_{5^4} \iff \mathbb{F}_5(a) \neq \mathbb{F}_5 \wedge \mathbb{F}_5(a) \neq \mathbb{F}_{5^2} \iff a \notin \mathbb{F}_{5^2}.$$

Damit gibt es genau

$$|\mathbb{F}_{625} \setminus \mathbb{F}_{25}| = |\mathbb{F}_{625}| - |\mathbb{F}_{25}| = 625 - 25 = 600$$

Elemente mit der gewünschten Eigenschaft.