

## F23-T3-A3

Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Gruppen der Ordnung  $2023 = 7 \cdot 17^2$ .

*Lösungsvorschlag.* Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung 2023 und seien  $n_7$ , bzw.  $n_{17}$  die Anzahl der 7-, bzw. der 17-Sylow-Gruppen. Nach den Sylowsätzen gilt

$$n_7 \equiv 1 \pmod{7}, \quad (1)$$

$$n_7 \mid 17^2, \quad (2)$$

$$n_{17} \equiv 1 \pmod{17}, \quad (3)$$

$$n_{17} \mid 7. \quad (4)$$

Aus (2) und (4) folgt  $n_7 \in \{1, 17, 17^2\}$  und  $n_{17} \in \{1, 7\}$ . Wegen (1) und (3) kann man weiter ausschließen und wir erhalten  $n_7 = n_{17} = 1$ .

Sei also  $P$  die einzige 7-Sylow-Gruppe und  $Q$  die einzige 17-Sylow-Gruppe von  $G$ . Als einzige Gruppen ihrer Ordnung sind sowohl  $P$  als auch  $Q$  Normalteiler von  $G$  und sie schneiden sich wegen ihrer teilerfremden Ordnung trivial, sodass

$$P \times Q \cong P \cdot Q < G$$

gilt. Aus dieser Isomorphie folgt

$$|P \cdot Q| = |P \times Q| = |P| \cdot |Q| = 7 \cdot 17^2 = |G|$$

und damit  $G = P \cdot Q$ . Da  $P$  von Primzahlordnung ist, ist  $P$  zyklisch und isomorph zu  $\mathbb{Z}_7$ .  $Q$  ist abelsch, da sie  $17^2$  Elemente hat und ist daher nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte abelsche Gruppen isomorph zu  $\mathbb{Z}_{17} \times \mathbb{Z}_{17}$  oder  $\mathbb{Z}_{17^2}$ . Insgesamt erhalten wir zwei Möglichkeiten für den Isomphietyp von  $G$ , nämlich

$$\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{17} \times \mathbb{Z}_{17} \quad \text{oder} \quad \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{17^2}.$$