

F23-T2-A4

Seien p und q zwei Primzahlen. Bestimmen Sie den Zerfällungskörper des Polynoms $X^p - q \in K[X]$ für die Grundkörper $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ und \mathbb{C} .

Lösungsvorschlag. (i) $K = \mathbb{Q}$: Die Nullstellen von $X^p - q$ in \mathbb{C} sind gegeben durch

$$\sqrt[p]{q}, \sqrt[p]{q}\zeta, \dots, \sqrt[p]{q}\zeta^{p-1}$$

für eine primitive p -te Einheitswurzel ζ . Der Zerfällungskörper ist daher $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{q}, \zeta)$.

(ii) $K = \mathbb{R}$: Da bereits $\sqrt[p]{q} \in \mathbb{R}$ gilt, ist der Zerfällungskörper in diesem Fall $\mathbb{R}(\zeta)$.

(iii) $K = \mathbb{C}$: Da das Polynom bereits in $\mathbb{C}[X]$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt, ist \mathbb{C} schon der Zerfällungskörper.